Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Troisième séance d'exercices –

connexions et tenseur de Riemann

Exercice 1 : crochet de Lie. Soient $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteurs sur une variété $\mathcal{M}$. On définit le *crochet de Lie* $[u, v]$ de u et v par son action sur une fonction quelconque $f \in C^\infty(\mathcal{M})$:

$$[u,v](f) \triangleq u(v(f)) - v(u(f)).$$

a. Montrer que, dans une carte locale et dans la base des dérivées partielles $\{\partial_\alpha\}$, les composantes de $[u, v]$ sont

$$[u,v]^\alpha \triangleq u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - u^\alpha{}_{,\beta}\, v^\beta.$$

b. Vérifier explicitement que ce sont bien les composantes d'un champ de vecteurs.

Exercice 2 : transport parallèle dans $\mathbb{R}^2$. Soit l'espace Euclidien à 2 dimensions, sur lequel on définit le transport parallèle au sens usuel de la géométrie élémentaire. On considère le plan en coordonnées polaires : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$. À partir de la définition du transport parallèle

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) \triangleq V^\mu(x) - V^\lambda(x)\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Delta x^\nu,$$

déterminer les coefficients de connexion dans ces coordonnées (indice : considérer séparément des déplacements selon r et selon ϕ). Comparer les résultats au calcul direct des symboles de Christoffel.

On en conclut que le transport parallèle ainsi défini est compatible avec la métrique et correspond à une connexion sans torsion.

Exercice 3 : identités de Ricci. On considère une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion sans torsion.

a. Soit $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} v^\lambda.$$

b. Montrer que, pour tout champ de covecteurs $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$, on a la relation

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega_\rho = -R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\omega_\lambda.$$

c. Généraliser ces relations à un champ de tenseurs de rang $(1, 1)$:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} T^\lambda{}_\beta - R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} T^\alpha{}_\lambda,$$

puis à un champ de tenseurs de rang (m, n) quelconque.

Exercice 4 : tenseur de Riemann. Le tenseur de Riemann est défini formellement comme l'application

$$\begin{aligned} R :\ & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ :\ & (X, Y, Z) \mapsto R(Z, X, Y) \triangleq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

avec ∇ la connexion de Levi-Civita. Montrer que, dans une carte locale, on a

$$R(Z, X, Y) = R^\alpha{}_{\nu\mu\beta} X^\mu Y^\beta Z^\nu \partial_\alpha.$$

Ceci montre que R est bien un champ de tenseurs, et pas simplement un opérateur différentiel comme la définition aurait pu le laisser croire.